Часть III. Теория вероятностей

Глава 3. Повторение независимых испытаний

§17. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли

Теорема. Вероятность того, что в серии n–независимых испытаний с постоянной вероятностью наступления события в каждом отдельном испытании $0 < p < 1$ и не наступления события (q), событие A наступит ровно m раз вычисляется по формуле БЕРНУЛЛИ:

$$P(m\,;n) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$ **или**

$$P(m\,;n) = \frac{n\,!}{m\,!\,(n-m)\,!} \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$ **ч.т.д.**

Пример: Вероятность того, что из яйца выведется петушок - $\frac{1}{2}$, курочка - $\frac{1}{2}$.

Что вероятнее:

1)   что из 4 яиц будет 2 курочки или
2)   что из 6 яиц будет 3 курочки? (негодных яиц нет).

1) $n = 4$

$m = 2$

$p = \frac{1}{2}$

$q = \frac{1}{2}$

$P(2;4) - ?$

$$P(2;4) = \frac{4!}{2!2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} = 0,375$$

2) $n = 6$

$m = 3$

$p = \frac{1}{2}$

$q = \frac{1}{2}$

$P(3;6) - ?$

$$P(3;6) = \frac{\overset{4\cdot5\cdot6}{6!}}{3!3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16} = 0,3125$$

$$P(2;4) > P(3;6)$$

Ответ: **вероятнее получить 2 курочки из 4 яиц.**

Теорема Бернулли может быть использована только при $n \le 10$ **и** $p > 0{,}1$**.**

Далее определим вероятность того, что в *n* – испытаниях событие наступит:

1) менее *m* раз:

$P(0;n) + P(1;n) + \ldots + P(m-1;n)$**;**

2) более *m* раз:

$P(m+1;n) + P(m+2;n) + \ldots + P(n;n)$**;**

3) не менее *m* раз:

$P(m;n) + P(m+1;n) + \ldots + P(n;n)$**;**

4) не более *m* раз:

$P(0;n) + P(1;n) + \ldots + P(m;n)$**.**

§18. Локальная теорема Лапласа.

Теорема. **Вероятность того, что в серии *n*–независимых испытаний событие *A* наступит *m* раз, если только вероятность появления события в каждом отдельном испытании постоянна** $0 < p < 1$**, вычисляется по формуле:**

$$\boxed{P(m;n) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}} \quad (2),$$

где $\boxed{x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}}$

Формула тем точнее, чем больше *n*.

Определение 1. **Выражение**

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$ **- называется локальной функцией Лапласа.**

Значения этой функции вычислены и помещены в специальную таблицу. Для решения задач пользуются рабочей формулой:

$\boxed{P(m;n) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}}$ **, где** $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$

Свойства функции $\varphi(x)$

1) $Д(y): \quad x \in R$

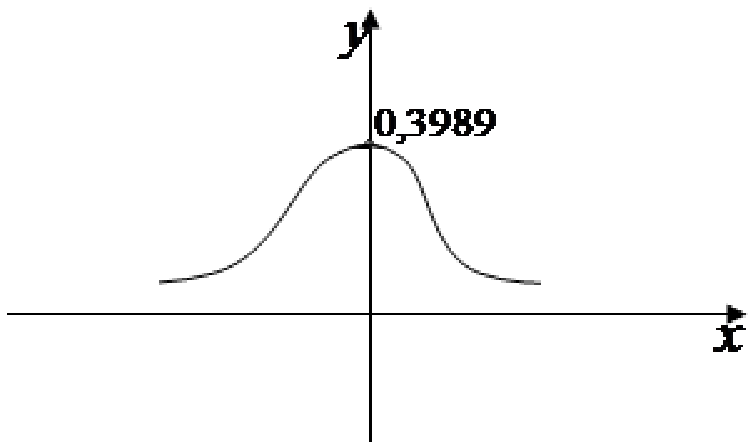
2) $\varphi(-x) = \varphi(x)$ **- функция четная, график симметричен относительно оси ОУ.**

3) **С осью** ***OX*** **не пересекается, так как** $e^{-\frac{x^2}{2}}$ **- показательная функция и нулем быть не может.**

4) **В точке** ***x=0*** **функция достигает** max

$\varphi_{max}(0) \approx 0,3989$

5) **При** $x \to \pm\infty \qquad \varphi \to 0$



- кривая Гаусса или кривая распределения вероятностей

Пример: Вероятность того, что в колосе пшеницы будет ровно *40 зерен = 0,2*. К.в.т.,ч. среди 4 тысяч колосьев будет 800 штук таких, у которых в колосе будет 40 зерен?

$$
\begin{array}{l}
n = 4000 \\
m = 800 \\
p = 0{,}2 \\
q = 0{,}8 \\
\hline
P(800;4000) - ?
\end{array}
$$

$$x = \frac{800 - 4000 \cdot 0{,}2}{\sqrt{4000 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0 \qquad \varphi(0) = 0{,}3989$$

$$P(800;4000) \approx \frac{0{,}3989}{4\sqrt{40}} \approx 0{,}05$$

Замечания:

1. Переменную x всегда нужно вычислять с двумя знаками после запятой.

2. Если $p < 0{,}1$, то формула Лапласа дает большую погрешность.

Следовательно, формула (2) применяется, если $\boxed{n > 10\,,\ p > 0{,}1}$

§19. Теорема Пуассона.

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю $(p \to 0)$ при неограниченном увеличении числа n испытаний $(n \to \infty)$, причем произведение $n \cdot p$ стремится к

постоянному числу $\lambda(np \to \lambda)$, то вероятность $P(m;n)$ того, что событие *A* появится *m* раз в *n* независимых испытаниях, удовлетворяет предельному равенству:

$$P(m;n) \approx \underline{\frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}}$$, **где** $\boxed{\lambda = n \cdot p}$

Это формула Пуассона (формула редких событий).

1. **Формула Пуассона используется при** $(n \cdot p \cdot q) < 9; \ (p < 0{,}1)$

2. **Параметр λ можно искать иначе, если указано среднее число λ_1 появления события за единицу какой – нибудь области и размер области, то тогда** $\boxed{\lambda = \lambda_1 \cdot S}$.

3. **Закону Пуассона подчиняются:**

а) **Число α-частиц, испускаемых радиоактивным изотопом в единицу времени;**

б) **Число вызовов, поступающих на телефонную станцию в единицу времени;**

в) **Число самолетов, принимающих в аэропорт за какую-нибудь единицу времени.**

Теорема Пуассона чаще всего применяется в теории массового обслуживания.

Пример 1: Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится = 0,0002. К.в.т.,ч. на базу прибудут 3 негодных изделия?

$$n = 5000$$
$$p = 0,0002$$
$$m = 3$$
$$P(3;5000) - ?$$

$$\lambda = n \cdot p = 5000 \cdot 0,0002 = 1$$

$$P \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0,06$$

Пример 2: Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор = 0,02. Какое из событий вероятнее: в течение одной минуты позвонит 3 абонента или 4 абонента?

$$\lambda_1 = 0{,}02$$
$$S = 100$$
$$m_1 = 3$$
$$m_2 = 4$$

$$\lambda = \lambda_1 \cdot S = 0{,}02 \cdot 100 = 2$$

$$P_1(3\,;100) \approx 0{,}1805 \qquad P_2(4\,;100) \approx 0{,}0902$$

$$P_1 > P_2$$

§20. Наивероятнейшее число появлений события А в серии *n* – независимых испытаний.

Определение 1. ***Наивероятнейшим числом*** **наступления события *A* в серии *n* – независимых испытаний называется такое число** $m = \mu$ **наступлений этого события, которому соответствует наибольшая вероятность.**

Формулы нахождения наивероятнейшего числа.

1. Если $(n \cdot p)$ **- целое число, то** $\boxed{\mu = n \cdot p}$

2. Если $(n \cdot p)$ **- дробное, то** μ **находят из неравенств:**

$$\boxed{np - q \le \mu \le np + p}$$

Пример: Вероятность всхожести семян 0,8. Найти наивероятнейшее число всходов, если посадили 38 зерен?

$$\left.\begin{array}{l} n = 38 \\ p = 0{,}8 \\ \underline{q = 0{,}2} \\ \mu - ? \end{array}\right| \begin{array}{|l} np = 0{,}8 \cdot 38 = 30{,}4 \\ 30{,}4 - 0{,}2 \le \mu \le 30{,}4 + 0{,}8 \\ 30{,}2 \le \mu \le 31{,}2 \\ \mu = 31 \end{array}$$

§21. Интегральная теорема Лапласа

Пусть проводится серия *n*–независимых испытаний на наступление события *A*, в каждом из которых вероятность появления события *A* постоянна и равна *p* $(0 < p < 1)$**.**

Теорема. **Вероятность того, что событие *A* в серии *n*–независимых испытаний появится не менее** m_1 **- раза и не более** m_2 **- раз приближенно равна:**

$$\boxed{P(m_1 \le m \le m_2; n) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)},$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$; $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$ **;**

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

При решении такого вида задач пользуются специальными таблицами.

Свойства функции *Ф(х):*

1. Функция *Ф(х)* нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ **;**

2. Наименьшее значение функция принимает в точке *x=0* $\Phi_{min}(0) = 0$ **;**

3. Наибольшее значение функция принимает при *x=5* $\Phi_{max}(5) = 0,5$ **;**

4. Для всех *x>5* берут значение $\Phi(x > 5) = 0,5$**.**

Пример: **Вероятность того, что вес зерен гороха 0,25г. = 0,3. К.в.т.,ч. среди взятых 200 штук, с этим весом будет от 50 до 70 штук.**

$$m_1 = 50$$
$$m_2 = 70$$
$$n = 200$$
$$p = 0,3$$
$$q = 0,7$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50-60}{\sqrt{42}} = \frac{-10}{\sqrt{42}} \approx -1,54$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70-60}{\sqrt{42}} = \frac{10}{\sqrt{42}} \approx 1,54$$

$$P(50 \le m \le 70; 200) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1,54) - \Phi(-1,54) =$$
$$= \Phi(1,54) + \Phi(1,54) = 2\Phi(1,54) = 2 \cdot 0,438 = 0,876$$

Следствие. **Если вероятность р наступления события** ***A*** **в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то при достаточно большом числе** ***n*****–независимых испытаний вероятность того, что:**

а) Число ***m*** **наступлений события** ***A*** **отличается от произведения** $(n \cdot p)$ **не более, чем на величину** $\varepsilon > 0$ **(по абсолютной величине), т.е.**

$$\boxed{P_n\left(|m-np|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)}$$

б) Частость $\frac{m}{n}$ **события** ***A*** **заключена в пределах от α до β (включительно), т.е.**

$$\boxed{P_n\left(\alpha\le\frac{m}{n}\le\beta\right)\approx\Phi(z_2)-\Phi(z_1)},$$

где $z_1=\dfrac{\alpha-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$; $z_2=\dfrac{\beta-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$

в) Отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ **от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа** $\varepsilon>0$

$$\boxed{P_n\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)}$$

Пример 1**: В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют морозильники. Какова вероятность того, что от 280 до 360 семей из 400 имеют морозильники.**

Воспользуемся следствием *(а)*

$$n = 400$$
$$m_1 = 280$$
$$m_2 = 360$$
$$p = 0{,}8$$
$$q = 0{,}2$$

Границы интервала 280 и 360 симметричны относительно величины $np = 400 \cdot 0{,}8 = 320 \Rightarrow \varepsilon = 40$

$$P_{400}\left(280 \le m \le 360\right) = P_{400}\left(-40 \le m - 320 \le 40\right) \approx$$

$$\approx P_{400}\left(\left|m - 320\right| \le 40\right) \approx 2\Phi\left(\frac{40}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) = 2\Phi\left(\frac{40}{8}\right) =$$

$$= 2\Phi(5) = 2 \cdot 0{,}5 = 1$$

Пример 2: **По статистическим данным в среднем 87% новорожденных доживают до 50 лет. Какова вероятность того, что из 1000 новорожденных доля (частость) доживших до 50 лет будет:**

а) заключена в пределах от 0,9 до 0,95

б) будет отличаться от вероятности этого события не более, чем на 0,04 (по абсолютной величине).

Решение

а)

$p=0{,}87$
$q=0{,}13$
$n=1000$
$\alpha=0{,}9$
$\beta=0{,}95$

$$P\left(0{,}9\le\frac{m}{n}\le 0{,}95\right)\approx \Phi(z_2)-\Phi(z_1)$$

$$z_1=\frac{\alpha-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{0{,}9-0{,}87}{\sqrt{\frac{0{,}87\cdot 0{,}13}{1000}}}\approx 2{,}82$$

$$z_2=\frac{\beta-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{0{,}95-0{,}87}{\sqrt{\frac{0{,}87\cdot 0{,}13}{1000}}}\approx 7{,}52$$

$$P\approx \Phi(7{,}52)-\Phi(2{,}82)=0{,}5-0{,}4976=0{,}0024$$

б)

$p=0{,}87$
$q=0{,}13$
$n=1000$
$\varepsilon=0{,}04$

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

$$P_{100}\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}87\right|\le 0{,}04\right)\approx 2\Phi\left(0{,}04\cdot\sqrt{\frac{1000}{0{,}87\cdot 0{,}13}}\right)\approx$$

$$\approx 2\Phi(3{,}76)=2\cdot 0{,}49989=0{,}99978$$

Так как неравенство $\left|\frac{m}{n}-0{,}87\right|\le 0{,}04 \Leftrightarrow$ **неравенству** $0{,}83\le\frac{m}{n}\le 0{,}91$**, то полученный результат означает, что практически достоверно, что от 0,83 до 0,91 числа новорожденных из 1000 доживут до 50 лет.**